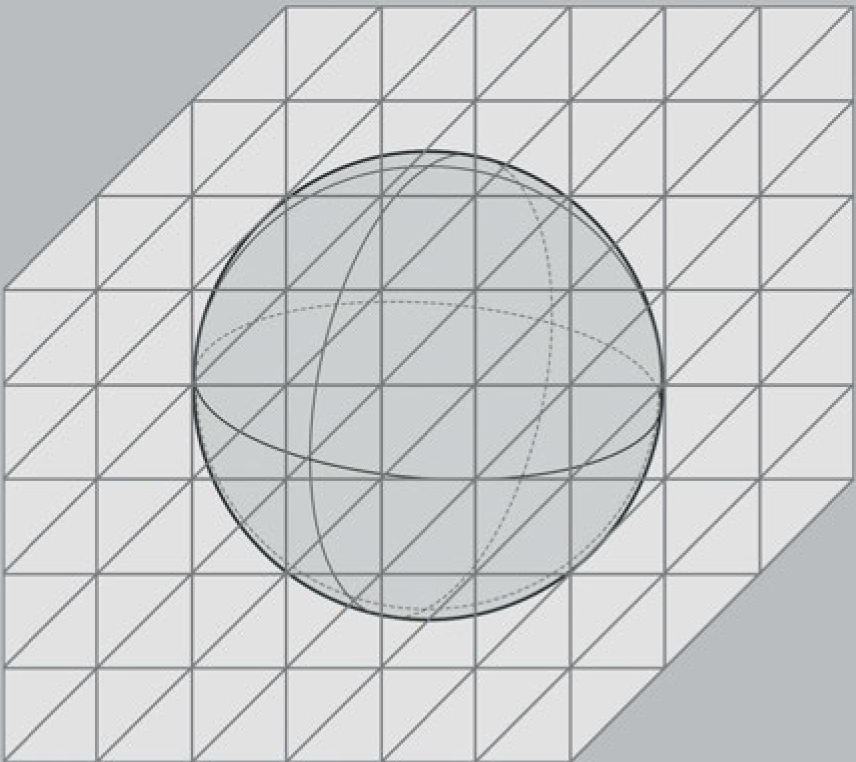
Piotr Zarzycki

Modelowanie pojęć matematycznych



Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego

Modelowanie pojęć matematycznych

Piotr Zarzycki

Modelowanie pojęć matematycznych

Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego
Gdańsk 2019

Recenzja
dr hab. Henryk Kąkol, prof. nadzw. WSA

Redakcja wydawnicza
Katarzyna Ambroziak

Projekt okładki i stron tytułowych
Filip Sendal

Wszystkie fotografie zamieszczone w książce są autorstwa Piotra Zarzyckiego

Ilustracja na stronie 46
Girolamo Cardano, miedzioryt wykonany przez C.A. Forestiera, XVIII w.
(domena publiczna na prawach wolnego dostępu)

Skład i łamanie
Lech Chańko

Publikacja dofinansowana ze środków Dziekana Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

ISBN 978-83-7865-940-2

Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego
ul. Armii Krajowej 119/121, 81−824 Sopot
tel./fax 58 523 11 37, tel. 725 991 206
e-mail: wydawnictwo@ug.edu.pl
www.wyd.ug.edu.pl
Księgarnia internetowa: www.kiw.ug.edu.pl

Druk i oprawa
Zakład Poligrafii Uniwersytetu Gdańskiego
ul. Armii Krajowej 119/121, 81-824 Sopot
tel. 58 523 14 49; fax 58 551 05 32

Spis treści

Wstęp

O czym i dla kogo jest ta książka? Opisuję w niej niektóre podstawowe pojęcia matematyczne z dwóch perspektyw, szkolnej i matematycznej. Perspektywa szkolna określa dwa kręgi odbiorców. Do pierwszego z nich można zaliczyć przyszłych nauczycieli matematyki (studiujących matematykę) lub pracujących już nauczycieli matematyki oraz wykładowców tych uczelni wyższych, które przygotowują studentów do uczenia matematyki, prowadząc rozmaite zajęcia w ramach szeroko rozumianej dydaktyki matematyki. Drugi krąg odbiorców to wykładowcy prowadzący zajęcia *stricte* matematyczne na sekcjach nauczycielskich. Niestety część z tych osób nie dostrzega, nie zna perspektywy szkolnej i albo nie zajmuje się takimi pojęciami, jak liczby całkowite, wymierne, długość, pole, objętość, albo podaje ich opis w akademicki, abstrakcyjny sposób, nie pokazując szkolnego tła tych pojęć. Niniejsza książka ma za zadanie pomóc takim osobom dostrzec szkolny aspekt niektórych pojęć. Chciałbym podkreślić, że niekiedy sięgam do „szkolnych początków” opisywanych pojęć, tj. do nauczania wczesnoszkolnego. W nauczaniu tym, a nawet w przedszkolu kształtują się bowiem podstawowe pojęcia geometryczne i przede wszystkim pojęcie liczby naturalnej.

W książce pokazuję, w jaki sposób można wprowadzać i kształtować niektóre pojęcia matematyczne, w jaki sposób „robi się” to w szkole (w tym celu zamieszczone zostały fragmenty szkolnych podręczników) i jak wyglądają formalne matematyczne definicje tych pojęć. Odwołuję się do podstawy programowej z matematyki, czyli bardzo ważnego dokumentu, określającego, jakich zagadnień z matematyki powinno się uczyć w szkole. Niestety podstawa programowa zmieniała się ostatnio zbyt często, a niektóre wątki zniknęły z obecnie „obowiązujących” podręczników (dostosowanych do podstawy programowej). Mam nadzieję, że sporo nauczycieli nie przejmie się tymi cięciami i będzie uczyć matematyki, kierując się dobrymi przykładami, a nie narzuconymi biurokratycznymi ograniczeniami; dotyczy to zwłaszcza tzw. klas matematycznych.

Książka powstała na podstawie materiałów do wykładów „Modelowanie wybranych pojęć matematycznych”, które prowadziłem w latach 2011–2017 dla studentów sekcji nauczycielskiej w Instytucie Matematyki Uniwersytetu

Gdańskiego. Przed niektórymi wykładami pytałem studentów (w formie ankiety), co wiedzą np. o liczbach rzeczywistych, o pojęciu pola figury płaskiej, o funkcjach ciągłych; wyniki tych ankiet bardzo mnie zaniepokoiły — wiedza przyszłych nauczycieli matematyki na temat istoty pojęć, które będą wprowadzać w szkole, jest płytka (niektóre odpowiedzi studentów przytaczam). Można zapytać, czy taka głębsza wiedza jest im potrzebna? Podobne, raczej retoryczne pytanie można zadać np. przyszłym lekarzom: po co lekarzowi podstawowej opieki medycznej wiedza na temat komórki, genów itp.? Uważam, że fundamentalna wiedza jest jednak niezbędna, zwłaszcza przyszłym nauczycielom matematyki; na ogół nie tworzą oni matematyki, ale, omawiając, kształtując pojęcie matematyczne w szkole, warto sięgać do matematycznych podstaw danego pojęcia.

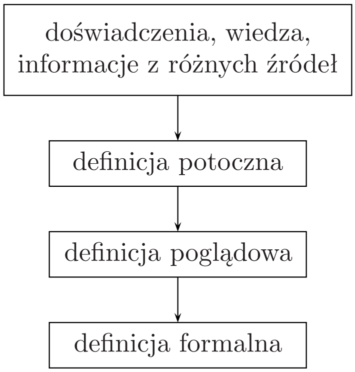
Książka została podzielona na cztery rozdziały, każdy podrozdział w rozdziale zakończony jest zestawem zadań (umownie nazwanych ćwiczeniami) do samodzielnej pracy. Część z nich ma charakter dydaktyczny, część to zadania matematyczne, a niektóre to sugestie dalszych lektur. Po każdym podrozdziale przedstawiono spis literatury; znajdują się w nim także podręczniki (ich wybrane fragmenty zamieszczono w książce).

Chciałbym wyrazić ogromną wdzięczność pierwszym czytelnikom książki, Panom Marcinowi Karpińskiemu i Ryszardowi Kubiakowi — dzięki ich uwagom i sugestiom nabrała ona obecnego kształtu. Dziękuję również Profesorowi Henrykowi Kąkolowi za wnikliwe przeczytanie maszynopisu i szereg cennych uwag.

Piotr Zarzycki

Jak kształtować pojęcia matematyczne — zasady ogólne

W czasie dwunastu lat szkolnej edukacji matematycznej uczniowie poznają wiele pojęć. Niektóre z nich „tkwią” w uczniach, inne trzeba, niekiedy z dużym trudem, modelować. Kształtując jakieś pojęcie, powinniśmy się opierać na wiedzy codziennej (potocznej) ucznia; poniższy schemat modelowania pojęć matematycznych dotyczy praktycznie wszystkich opisywanych w tej książce pojęć.



Przez doświadczenia rozumiemy wszelkie doznania zmysłowe zebrane w dotychczasowym życiu ucznia i doświadczenia — eksperymenty (spontaniczne) związane z danym pojęciem. Z definicją potoczną wiąże się intuicyjne rozumienie kształtowanego pojęcia. Przygotowując uczniów do definicji poglądowej, warto zadbać o pojawienie się sporej liczby desygnatów wprowadzonego pojęcia, które uczniowie powinni znać, np. ułamki (liczby wymierne) powinny być kojarzone z połówkami, ćwiartkami. Za strzałkami kryją się działania dydaktyków matematyki, nauczycieli, autorów podręczników, rodziców, które mają ukształtować (wymodelować) jakieś matematyczne pojęcie. Różnice między trzema rodzajami definicji są intuicyjnie jasne, np. pole potocznie oznacza wielkość figury płaskiej, poglądowo to liczba jednakowych kwadratów szczelnie wypełniających tę figurę (definicja ta powinna być rozszerzona, bo z takiej jej formy nie można byłoby obliczyć np. pola trójkąta), a formalnie pole definiuje się za pomocą miary wewnętrznej i zewnętrznej Jordana.

Sformułujmy reguły modelowania pojęcia matematycznego w następujący sposób:

1. Bazą do kształtowania matematycznego pojęcia są doświadczenia uczniów w intuicyjnym posługiwaniu się tym pojęciem w sytuacjach realnych.

2. Należy starać się, aby w szkolnej edukacji matematycznej pojawiły się przynajmniej dwa pierwsze typy definicji, tj. definicja potoczna i poglądowa.

3. Wprowadzając, opisując pojęcie matematyczne, uczeń powinien, jeśli to możliwe, przechodzić przez trzy etapy: **enaktywny** (poznawanie pojęcia poprzez odpowiednio zaplanowane aktywności, działania), **ikoniczny** (tworzenie reprezentacji ikonicznej pojęcia) i **symboliczny** (badanie wprowadzonego pojęcia przy użyciu symboliki matematycznej). Jest to sformułowana przez Jerome'a Brunera **zasada trzech etapów**.

Zasada trzech etapów — uwagi ogólne

Amerykański psycholog Jerome Bruner (zob. [Bru] oraz [Siw]) sformułował jedną z fundamentalnych zasad nauczania matematyki, tzw. zasadę trzech etapów. Zasadę tę można wyrazić w następujący sposób: **W nauczaniu każdego matematycznego pojęcia powinny się pojawić trzy etapy: enaktywny, ikoniczny i symboliczny.**

Etap enaktywny (tego słowa nie ma w słowniku języka polskiego, pochodzi ono od angielskiego wyrazu *enact*, który m.in. oznacza „odgrywać rolę") polega na poznawaniu pojęcia poprzez pracę nad realnie, fizycznie istniejącymi obiektami. **Etap ikoniczny** to praca, ćwiczenia związane z wprowadzanym pojęciem poprzez tworzenie jego reprezentacji rysunkowych (ikonicznych), zaś **etap symboliczny** oznacza zapisywanie istotnych informacji na temat danego pojęcia za pomocą symboli, a także wykonywanie operacji na symbolach obrazujących to pojęcie.

Warto podkreślić, że chociaż przywołana kolejność, czyli najpierw etap enaktywny, potem ikoniczny i wreszcie symboliczny, jest naturalna, to w nauczaniu etapy te mogą nakładać się na siebie, przenikać i łączyć. Poniżej zamieszczamy przykład realizacji zasady trzech etapów (poziom wczesnoszkolny, dodawanie liczb naturalnych).

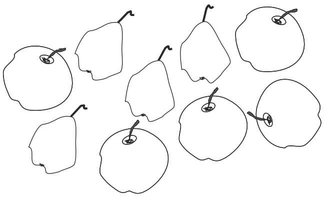
Przykład

Zobrazujemy zasadę trzech etapów na przykładzie dotyczącym liczb naturalnych poznawanych w nauczaniu początkowym. Wprowadzanym pojęciem jest suma liczb.

Etap enaktywny polega na policzeniu 3 jabłek i 2 gruszek, a zadanie dla ucznia jest następujące: *Przełóż na mniejszy talerz 3 jabłka i 2 gruszki, a następnie odpowiedz, ile razem owoców jest na mniejszym talerzu.*

Rozwiązanie tego zadania polega na aktywności przełożenia i w początkowym okresie edukacji na policzeniu wszystkich owoców na talerzu.

Etap ikoniczny polega na podobnym zadaniu, jednak teraz operujemy na obrazkach: *Pokoloruj 3 jabłka i 2 gruszki, a następnie odpowiedz, ile razem owoców pokolorowałeś.*



Etap symboliczny to zapisanie działania, zobrazowanego na dwóch poprzednich etapach, za pomocą symboli: *Zapisz za pomocą cyfr i znaku dodawania sumę liczb 3 oraz 2 i wynik tego dodawania.*

LITERATURA

[Bru] Bruner J.S., *Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznawania*, przeł. B. Mroziak, PWN, Warszawa 1978

[Siw] Siwek H., *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa 2005

Rozdział 1

Liczby

1.1. Liczby naturalne

Liczby naturalne w edukacji szkolnej

Liczby naturalne pojawiają się już na początku edukacji szkolnej, ale dziecko nie dowiaduje się o liczbach dopiero w szkole, zna je znacznie wcześniej — małe dzieci liczą paluszki (jeden, dwa, trzy, cztery, pięć, ...). Zauważmy, że liczby opisane są za pomocą słów, symbole 1, 2, 3, 4 itd. pojawiają się później. Człowiek otoczony jest przez liczby, „atakowany" przez ogromną ilość informacji wyrażanych za pomocą liczb. Tak więc kształtując pojęcie liczby naturalnej, powinniśmy się opierać na wiedzy potocznej ucznia. W matematyce wczesnoszkolnej (klasy I–III) liczby stanowią priorytet, nie będziemy jednak zajmować się tym poziomem nauczania. Warto jednak wiedzieć, że istnieją dobrze udokumentowane teorie opisujące problem „percepcji" liczb naturalnych we wczesnym okresie rozwoju dziecka (np. teoria Piageta). Istotne znaczenie tych teorii dla nauczycieli klas czwartych i wyższych szkoły podstawowej polega na diagnostyce, np. brak tzw. konserwacji liczby to wyraźny sygnał dla nauczyciela, że uczeń, u którego zauważa się ten brak, będzie miał ogromne problemy z matematyką (polecamy książkę Stanislasa Dehaene *The Number Sense* [DS] poświęconą tym zagadnieniom).

Liczbami naturalnymi posługujemy się tak często, że można je nawet uważać za pojęcie pierwotne, a więc takie, którego się nie definiuje. Gdyby zapytać, co to jest liczba naturalna, to nawet dla dorosłego człowieka odpowiedź nie byłaby prosta, pewnie wielu odpowiedziałoby: jeden, dwa, trzy, ... W podobny sposób, przez **wyliczanie**, wprowadzają je autorzy zdecydowanej większości podręczników (zajmujemy się nauczaniem matematyki, począwszy od klasy IV szkoły podstawowej).

W kolejnych zamieszczonych tu fragmentach (poza ostatnim) z podręczników gimnazjalnych (obecnie VII i VIII klasa) lub ponadgimnazjalnych widać podobne określenia liczb naturalnych.

Liczby występują niemal we wszystkich dziedzinach działalności człowieka. W życiu codziennym najczęściej używamy liczb naturalnych. **Liczby naturalne** to 0, 1, 2, 3, 4, ..., 27, ..., 195, ..., 2874, ...

Liczby naturalne zapisujemy za pomocą dziesięciu **cyfr**:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podręcznik IV klasa SP, GWO [SP_IV_GWO]

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 to **cyfry**.
Za ich pomocą zapisujemy liczby.
Liczby 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ... to **liczby naturalne**.

Podręcznik IV klasa SP, Operon [SP_IV_Operon]

• Liczby $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ nazywamy **liczbami naturalnymi.**

Podręcznik I klasa G, GWO [G_I_GWO]

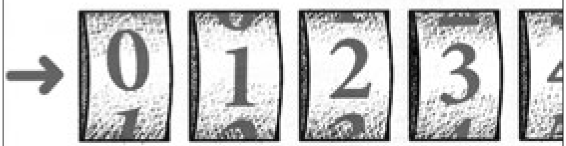
Liczby naturalne
$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
Liczby całkowite
$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Podręcznik I klasa L, GWO [L_I_GWO]

2 Liczby naturalne

„Liczba jest istotą wszystkich rzeczy"

Pitagoras (ok. 572 p.n.e. – 497 p.n.e.)

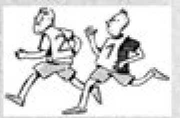


Liczby naturalne:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,... 101, 102, 103, 104,...
W dziesiątkowym systemie pozycyjnym liczby zapisujemy za pomocą dziesięciu cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

	cyfra tysięcy	cyfra setek	cyfra dziesiątek	cyfra jedności
Zapis 332 oznacza liczbę trzycyfrową równą $3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 1$		3	3	2
Zapis 1995 oznacza liczbę czterocyfrową równą $1 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 5 \cdot 1$	1	9	9	5

Podręcznik I klasa G, seria *Matematyka 2001*, WSiP [G_I_WSiP]

W pewnej dawnej grze dla dwóch graczy pierwszy podaje jakąś liczbę naturalną, potem to samo robi drugi. Wygrywa ten, kto poda liczbę większą, zgarniając różnicę w złocie. Czy warto być tym, który rozpoczyna?



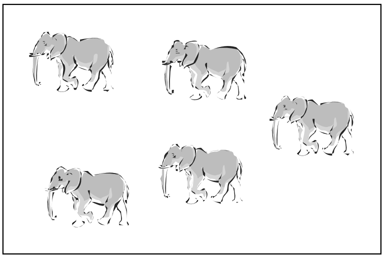
Liczby naturalne to te, które pojawiają się przy odliczaniu: 1, 2, 3,... Każdy się domyśla, co się kryje za wielokropkiem, ale właściwie, co tam jest? Pierwszą, najmniejszą liczbą naturalną jest liczba 1, ta, której odległość od 0 wyznacza skalę na osi liczbowej. (*Niekiedy przyjmuje się umowę, że najmniejszą liczbą naturalną jest właśnie liczba 0, ale tutaj nie będziemy się tak umawiać*). Następna to 2, którą możemy otrzymać z liczby 1 przez dodanie jedynki. Kolejną liczbę naturalną, liczbę 3, otrzymamy z liczby 2, dodając kolejną. Można sobie wyobrazić, że dalej powinno być podobnie. **Zdefiniujmy więc liczby naturalne jako te**, które można otrzymać z liczby 1 przez dodawanie 1 (i oczywiście samą jedynkę też uznajemy za liczbę naturalną).

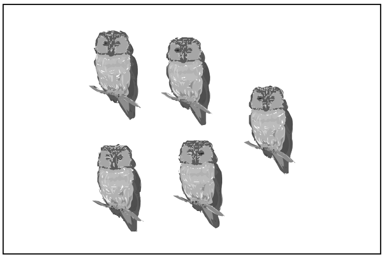
Podręcznik I klasa L, seria *Matematyka się liczy*, WSiP [L_I_WSiP]

Przedstawione w podręcznikach „definicje” (poza ostatnią, w której zero nie zostało zaliczone do liczb naturalnych) nie dają miarodajnej odpowiedzi, co to są liczby naturalne. Wypisanie 0, 1, 2, … obrazuje tzw. nieskończoność potencjalną, widzimy tylko trzy liczby (ich symbole), ale wierzymy, że jest ich nieskończenie wiele, co symbolizują trzy kropki. Zastanówmy się więc teraz, co to jest liczba naturalna.

Spójrzmy skrótowo, jak kształtuje się to pojęcie w edukacji wczesnoszkolnej[1]. Kiedy uczniowie poznają kolejne liczby naturalne, np. liczbę 5 i jej oznaczenie, to występuje ona w dwóch podstawowych aspektach, **kardynalnym** i **porządkowym**.

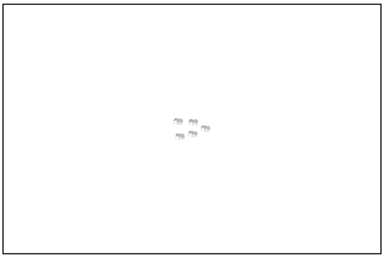
Popatrzmy na grupę słoni i grupę sów:

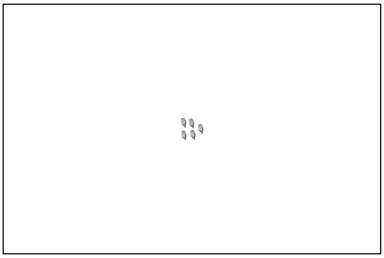




Co łączy te dwie grupy? Łączy je ta sama liczba elementów, na obrazkach jest 5 słoni i 5 sów, czyli liczba słoni i liczba sów są jednakowe. Wyobraźmy teraz sobie, że patrzymy na obie grupy (zbiory) z bardzo dużej odległości; widzimy już nie słonie i sowy, ale bardzo podobne do siebie zbiory pięciu punktów.

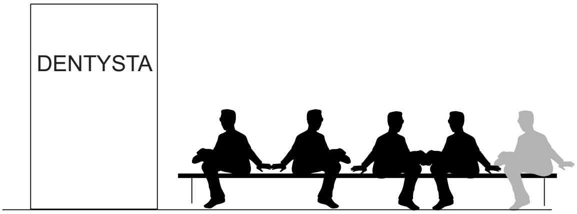
[1] „Dzieci przychodzące do szkoły na ogół liczą w zakresie 10. (…) Pamiętać jednak trzeba o tym, że umiejętność liczenia nie oznacza jeszcze rozumienia pojęcia liczby. (…) Od właściwego doboru ćwiczeń zależy, czy uczeń kończący klasę pierwszą będzie rozumiał liczbę jako pojęcie abstrakcyjne, czy też nadal będzie widział tylko jej konkretne realizacje, np. dwa palce, dwa jabłka” ([NPM_2], s. 233 i nn.).





Wyabstrahowaliśmy pojęcie liczby naturalnej (tutaj liczby 5), która jest atrybutem zbioru, grupy dowolnych przedmiotów, określającym liczbę elementów tego zbioru (tej grupy). To jest właśnie **aspekt kardynalny** liczby naturalnej.

Dzieci w początkowej fazie poznawania liczb liczą tak: jeden, dwa, trzy, cztery, pięć, nie podając od razu liczby pięć. Można zatem powiedzieć, że mimo używania liczebników głównych pojawia się w tym dziecinnym liczeniu **aspekt porządkowy**. Różnica między oboma aspektami liczby jest dość delikatna. Popatrzmy na przykład:



Dla pana w jasnym garniturze istotna jest pozycja w kolejce do dentysty, jest piąty, ma numerek 5, liczba 5 oznacza pozycję; liczebność zbioru oczekujących w kolejce jest mniej istotna. Aspekt porządkowy wiąże się z ważnym modelem liczb naturalnych, osią liczbową, na której zaznaczamy liczby 0, 1, 2, ... w pewnym porządku. Ten model powinien być wprowadzany niezbyt wcześnie (por. ćwiczenie 1.1.1), oś liczbowa jest linią ciągłą, niedziurawą, uczniowie zaznaczają na niej wyłącznie liczby 0, 1, 2, ..., ale pewnie niektórzy z nich zastanawiają się, co jest pomiędzy zaznaczonymi liczbami.

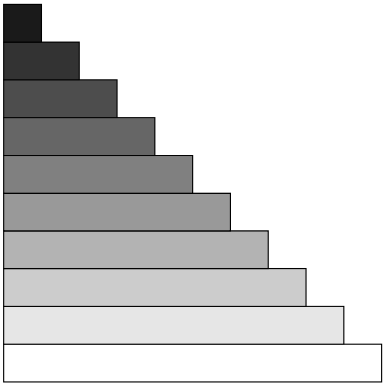
Liczby naturalne występują także w innych aspektach. Są to:

- aspekt miarowy; warto tutaj skorzystać np. z klocków Cuisenaire'a, mierząc różne wielkości za pomocą jednakowych klocków;
- aspekt pieniężny; można traktować go jako rodzaj aspektu miarowego (cena — „miara” wartości produktu), ale także aspektu kardynalnego: 5 zł w skarbonce może oznaczać, że w skarbonce znajduje się 5-elementowy zbiór monet jednozłotowych;

• aspekt kodowy; liczba zapisana cyframi oznacza np. numer telefonu (3414914, nikt nie mówi numer 3 miliony 414 tysięcy 914), liczba 23 dla fanów koszykówki to numer na koszulce słynnego Michaela Jordana.

Dlaczego potrzebne są nam tak różnorodne aspekty liczby naturalnej? Wykorzystuje się je do kształtowania kolejnych umiejętności, np. trudno sobie wyobrazić wprowadzanie algorytmów działań pisemnych na liczbach naturalnych bez aspektu pieniężnego (miarowego) liczby. Aspekt miarowy (także ten na osi liczbowej) przydaje się do modelowania dodawania i odejmowania jako działania przeciwnego.

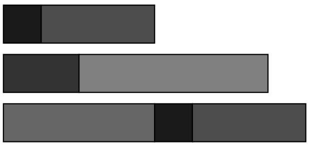
Wspomnieliśmy wyżej o **klockach Cuisenaire'a**, czyli o zestawie prostopadłościanów o wymiarach w centymetrach: $1 \times 1 \times 1$, $1 \times 1 \times 2$, $1 \times 1 \times 3$, $\ldots$, $1 \times 1 \times 10$. Niekiedy klocki te nazywa się **kolorowymi liczbami** lub **liczbami w kolorach**. Klocki różnych długości są różnych kolorów[2].



Klocków Cuisenaire'a używa się do rozmaitych ćwiczeń arytmetycznych, np. do zabaw w budowanie pociągów o różnych długościach (z klocków tych można także budować figury przestrzenne).

Przykłady

• Jaką długość mają poniższe pociągi?

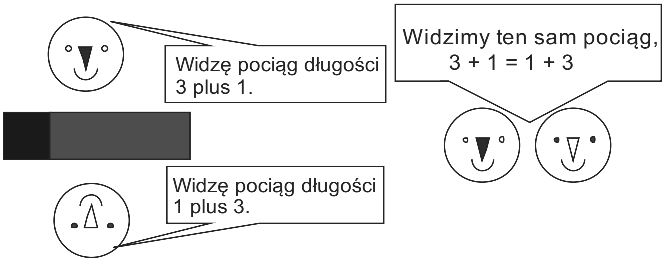


Zwróćmy uwagę na różne strategie rozwiązywania tego zadania prowadzące w końcu do zapisów symbolicznych: $1 + 3 = 4$, $2 + 5 = 7$, $4 + 1 + 3 = 8$.

[2] Opis kilku wersji klocków można znaleźć w [NPM_1].

• Ułóż pociąg o długościach 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm. Jaką długość miałby pociąg ułożony ze wszystkich klocków kompletu?

Klocków Cuisenaire'a można też użyć do ilustrowania praw działań na liczbach. Mówimy tutaj o przemienności i łączności (dodawania i mnożenia) oraz rozdzielności mnożenia względem dodawania. Prawa te pojawiają się już w IV klasie szkoły podstawowej, obecnie na szczęście w ukrytej formie; uczniowie wykorzystują je w tzw. sprytnych rachunkach w sytuacjach, gdy jest to naturalne. Na tym poziomie nie ma potrzeby mówienia o tych prawach w sposób abstrakcyjny — przy użyciu liter. Warto jednak o nich mówić; popatrzmy na wizualny „dowód" przemienności dodawania:



Powyższy „dowód" jest zgrabny, ale to tylko wizualizacja. Skąd wynikają prawa działań na liczbach naturalnych? Aby odpowiedzieć na to pytanie, powinniśmy dokładnie przyjrzeć się strukturze tych liczb, a właściwie ich definicjom formalnym.

Liczby naturalne — definicje

Zacznijmy od niemieckiego matematyka, Leopolda Kroneckera (1823–1891), który stwierdził, że „Liczby naturalne stworzył Bóg, a wszystko inne jest dziełem człowieka". Czyżby Kronecker, przypisując liczbom naturalnym boskie pochodzenie, nie widział potrzeby ich zdefiniowania? Takie definicje jednak się pojawiały, jedna z pierwszych, precyzyjnych definicji liczb naturalnych należy do niemieckiego logika, Gottloba Fregego (1848–1925), który oparł swoją definicję na teorii liczb kardynalnych skończonych.

Definicja pomocnicza
Zbiór nazywamy **zbiorem nieskończonym (w sensie Dedekinda)**, jeśli jest on równoliczny z pewną swoją częścią właściwą. **Zbiór skończony (w sensie Dedekinda)** to zbiór, który nie jest równoliczny z żadną swoją częścią właściwą.

Definicja Fregego liczb naturalnych
Liczby naturalne to moce zbiorów skończonych.

Uwagi

1. Z definicji Fregego wynika, że 0 jest liczbą naturalną, bo jest mocą zbioru pustego, który jest oczywiście skończony[3].
2. Dla każdej liczby naturalnej istnieje jej następnik, który jest też liczbą naturalną (por. ćwiczenie 1.1.5).
3. Liczba naturalna 0 nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej.
4. Jeśli następniki dwóch liczb naturalnych są sobie równe, to liczby te są też sobie równe.

Z liczbami zawsze związane są działania na nich. W szkole powszechnie korzystamy z własności działań na liczbach, tj. przemienności i łączności dodawania, przemienności i łączności mnożenia, rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Definicja sumy i iloczynu dwóch liczb naturalnych jest następująca:
Jeśli a, b są liczbami naturalnymi, czyli $a = |A|$, $b = |B|$ (symbolem $||$ oznaczamy moc zbioru), oraz zbiory A, B są rozłączne (rozłączność potrzebna jest do definicji sumy liczb), to

$$a + b \stackrel{\text{def}}{=} |A \cup B|$$

$$a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} |A \times B|$$

Udowodnimy np. (na gruncie definicji Fregego), że dodawanie liczb naturalnych jest przemienne.

$$a + b = b + a$$
$$a = |A|,\ b = |B|,\ A \cap B = \emptyset$$
$$a + b = |A \cup B|$$
$$b + a = |B \cup A| = |A \cup B| = a + b$$

Aksjomaty Peano

Inne podejście do liczb naturalnych zaprezentował na przełomie XIX i XX w. matematyk włoski, Giuseppe Peano (1858–1932). Oto aksjomaty Peano:

1. Element 0 jest liczbą naturalną.
2. Każda liczba naturalna n ma następnik $N(n)$, który jest liczbą naturalną.
3. Liczba 0 nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej.
4. Jeśli następniki dwóch liczb naturalnych są sobie równe, to same liczby też są równe.
5. (aksjomat indukcji) Każdy zbiór K złożony z liczb naturalnych o własnościach:
   - liczba 0 należy do K,
   - jeśli zbiór K zawiera dla każdej liczby naturalnej z tego zbioru także jego następnik, to zawiera wszystkie liczby naturalne.

[3] Przyjmując definicję Fregego, ostatecznie rozstrzygamy dylemat, czy zero jest liczbą naturalną — tak, jest!

Zbiór liczb naturalnych oznaczać będziemy przez $\mathbb{N}$ (niestety podobne oznaczenie — N — stosuje się do określenia następnika).

Jak, korzystając z aksjomatyki Peano, zdefiniować dodawanie i mnożenie liczb naturalnych? Poniżej przedstawiamy te definicje (warto tutaj podkreślić ich indukcyjny charakter).

Definicja sumy liczb naturalnych
Sumą $x + y$ liczb naturalnych x i y nazywamy dwuargumentową funkcję taką, że dla dowolnych liczb naturalnych x, y spełnione są warunki:
(i) $x + 0 = x$
(ii) $x + N(y) = N(x + y)$

Definicja iloczynu liczb naturalnych
Iloczynem $x \cdot y$ liczb naturalnych x oraz y nazywamy dwuargumentową funkcję taką, że dla dowolnych liczb naturalnych x, y spełnione są warunki:
(i) $x \cdot 0 = 0$
(ii) $x \cdot N(y) = (x \cdot y) + x$

Jak, korzystając z powyższych definicji, pokazać np., że dodawanie liczb naturalnych jest łączne?

Chcemy pokazać, że dla dowolnych liczb naturalnych x, y, z spełniona jest równość

$(*)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$

Niech x, y będą dowolnymi liczbami naturalnymi i niech K oznacza zbiór tych liczb naturalnych z, że spełniona jest równość $(*)$. Pokażemy, że K spełnia aksjomat indukcji, zatem $K = \mathbb{N}$.

- $0 \in K$: $(x + y) + 0 = x + y$
  $x + (y + 0) = x + y$
- Załóżmy, że zachodzi $(*)$ przy dowolnym, ustalonym z. Sprawdzimy, że wówczas zachodzi także $(*)$ dla $N(z)$.

$$(x+y)+N(z) = ((x+y)+z) = N(x+(y+z)) = x+N(y+z) = x+(y+N(z))$$

Uwaga
Istnieje inny sposób definiowania liczb naturalnych. Zaproponował go matematyk amerykański, John von Neumann (1903–1957). Sposób ten opierał się na wprowadzeniu relacji liniowego porządku w zbiorze ciągów, tzw. pałeczek.

ĆWICZENIA

1.1.1. Sprawdź w kilku podręcznikach matematyki na poziomie szkoły podstawowej, w jaki sposób wprowadza się oś liczbową.

1.1.2. Oś liczbowa pojawia się dość wcześnie w nauczaniu; uczniowie zaznaczają na niej liczby naturalne. Co zrobisz, gdy uczeń po narysowaniu linią ciągłą osi liczbowej i zaznaczeniu na niej kilku liczb naturalnych zapyta: „A co jest pomiędzy zaznaczonymi liczbami?”.

1.1.3. Uczniowie bardzo często nie odróżniają cyfry od liczby. W jaki sposób można ten problem wyjaśnić uczniowi?

1.1.4. Przeczytaj artykuł Romana Sikorskiego *Czy liczby rzeczywiste są rzeczywiste?* (miesięcznik „Delta”, październik 1974) lub pracę zbiorową *O twierdzeniach i hipotezach. Matematyka według „Delty”* (Wydawnictwa UW, 2005), w których można znaleźć kilka frapujących i dowcipnych opowieści o liczbach.

1.1.5. „Dla każdej liczby naturalnej istnieje jej następnik, który też jest liczbą naturalną.” To jedna z uwag dotyczących definicji Fregego liczb naturalnych (zob. s. 18). Co w tej uwadze oznacza termin „następnik”? Jeśli liczbie naturalnej n odpowiada zbiór A, to jaki zbiór odpowiada liczbie będącej następnikiem liczby n?

1.1.6. Korzystając z definicji Fregego liczb naturalnych, pokaż łączność dodawania.

1.1.7. Korzystając z aksjomatów Peano, pokaż przemienność mnożenia.

1.1.8. Napisz esej o definicji liczb naturalnych podanej przez von Neumanna.

LITERATURA

[L_I_WSiP] Bartol W., Dałek K., Łakoma E., Miczek Z., Miłosz G., Rudak L., Rygał G., Zawadowski W., *Podręcznik. Matematyka się liczy 1*, WSiP, Warszawa 2002

[G_I_WSiP] Bazyluk A., Dubiecka A., Dubiecka-Kruk B., Góralewicz Z., Malicki T., Piskorski P., Sienkiewicz H., Ziemiańczuk A., *Matematyka 2001. Podręcznik, klasa I gimnazjum*, WSiP, Warszawa 2005

[DS] Dehaene S., *The Number Sense*, Oxford University Press, New York 2011

[G_I_GWO] Dobrowolska M. (red.), *Matematyka 1*, GWO, Gdańsk 2008

[SP_IV_GWO] Dobrowolska M., Jucewicz M., Karpiński M., Zarzycki P., *Matematyka 4 z plusem. Podręcznik dla klasy czwartej szkoły podstawowej*, GWO, Gdańsk 2017

[SP_IV_Operon] Gaik M., Madej K., *Matematyka 4. Podręcznik dla szkoły podstawowej*, Operon, Gdynia 2008

[L_I_GWO] Karpiński M., Dobrowolska M., Braun M., Lech J., *Matematyka 1. Podręcznik dla liceum i technikum*, GWO, Gdańsk 2008

[NPM_1] Semadeni Z. (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 1, WSiP, Warszawa 1991

[NPM_2] Semadeni Z. (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 2, WSiP, Warszawa 1992

[PZ_SKPC] Zarzycki P., *SPKC*, NiM+TI (Nauczyciele i Matematyka Plus Technologia Informacyjna), nr 77/78, 2011

O czym i dla kogo jest ta książka? Opisuję w niej niektóre podstawowe pojęcia matematyczne z dwóch perspektyw, szkolnej i matematycznej. Perspektywa szkolna określa dwa kręgi odbiorców. Do pierwszego z nich można zaliczyć przyszłych nauczycieli matematyki (studiujących matematykę) lub pracujących już nauczycieli matematyki oraz wykładowców tych uczelni wyższych, które przygotowują studentów do uczenia matematyki, prowadząc rozmaite zajęcia w ramach szeroko rozumianej dydaktyki matematyki. Drugi krąg odbiorców to wykładowcy prowadzący zajęcia *stricte* matematyczne na sekcjach nauczycielskich. Niestety, część z tych osób nie dostrzega, nie zna perspektywy szkolnej i albo nie zajmuje się takimi pojęciami, jak liczby całkowite, wymierne, długość, pole, objętość, albo podaje ich opis w akademicki, abstrakcyjny sposób, nie pokazując szkolnego tła tych pojęć. Niniejsza książka ma za zadanie pomóc takim osobom dostrzec szkolny aspekt niektórych pojęć. Chciałbym podkreślić, że niekiedy sięgam do „szkolnych początków" opisywanych pojęć, tj. do nauczania wczesnoszkolnego. W nauczaniu tym, a nawet w przedszkolu kształtują się bowiem podstawowe pojęcia geometryczne i przede wszystkim pojęcie liczby naturalnej.

Fragment *Wstępu*

Problematyka poruszana w książce dotyczy jednego z najważniejszych komponentów procesu nauczania matematyki – kształtowania pojęć matematycznych. Biorąc pod uwagę różnorodność zamieszczonych tam treści, ukazanie się tej pozycji na rynku wydawniczym uważam za bardzo wartościowe wydarzenie dla dydaktyki matematyki. Tym bardziej że od czasów ukazania się *Zarysu dydaktyki matematyki* autorstwa Z. Krygowskiej w polskiej literaturze dydaktycznej nie pojawiła się tak duża pozycja poświęcona problemom kształtowania pojęć matematycznych.

Z recenzji dr. hab. Henryka Kąkola, prof. nadzw. WSA

Wydawnictwo
Uniwersytetu Gdańskiego

ISBN 978-83-7865-940-2